

Die hydromagnetischen Instabilitäten des Hohlpincheffektes

Von GÜNTHER LEHNER *

Aus dem Institut für Plasmaphysik, Garching bei München
(Z. Naturforsch. 16 a, 700—711 [1961]; eingegangen am 23. Februar 1961)

The method of normal mode analysis of KRUSKAL and SCHWARZSCHILD is applied in an investigation of the instabilities of the tubular pinch. The dispersion formula is derived and discussed for the limits of very large and very small wave numbers k . The cases $m=0$ and $m=1$ are evaluated numerically. One special case ($m=0, k=0$) is not included in the other-wise general dispersion formula and is therefore discussed separately.

Der in der vorhergehenden Arbeit¹ ausführlich diskutierte Hohlpincheffekt soll hier in bezug auf seine Instabilitäten untersucht werden.

Die Frage, ob eine Plasmagleichgewichtskonfiguration stabil ist oder nicht, läßt sich im wesentlichen mit zwei verschiedenen Methoden behandeln. Einmal kann man den Energiesatz in Form eines Variationsprinzips heranziehen. Ein Gleichgewicht ist instabil, wenn es irgendwelche Verrückungen aus dem Gleichgewicht heraus gibt, bei denen das Plasma kinetische Energie auf Kosten potentieller Energie (unter Einschluß der magnetischen Energie) gewinnt, stabil, wenn es kinetische Energie verliert, und indifferent, wenn diese sich überhaupt nicht ändert. Die Methode geht auf LUNDQUIST² zurück, wurde von BERNSTEIN, FRIEMANN, KRUSKAL und KULSRUD³ so weit ausgebaut, daß sie praktisch verwendbar wurde und hat sich in einer Reihe von Arbeiten als sehr fruchtbar erwiesen. Hier soll jedoch die andere, historisch ältere Methode der Normalschwingungen benutzt werden. Sie geht auf eine klassisch gewordene Arbeit von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD zurück⁴ und wurde seither ebenfalls häufig angewandt⁵⁻⁹. Sie ist besonders gut dann brauchbar, wenn man ein Gleichgewicht mit reinen Oberflächenströmen hat. Dies soll vereinfachend angenommen werden.

Ausgehend von einem Gleichgewichtszustand zwischen Plasma und Feldern betrachtet man so kleine Abweichungen davon, daß man in den Plasmagleichungen alle Glieder zweiter oder höherer Ordnung in den Störungen streichen kann („Linearisie-

rung“). Die Glieder nullter Ordnung heben sich wegen der Gleichgewichtsbedingungen von selbst heraus. Es bleibt ein lineares homogenes System von Diff.-Gln., das sich durch Exponentialansätze auf ein entsprechendes System von algebraischen Gleichungen zurückführen läßt. Dieses bestimmt die Störungen in den verschiedenen, voneinander durch Sprungflächen getrennten Bereichen bis auf eine bestimmte Anzahl von Konstanten. An den Sprungflächen sind gewisse von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD formulierte Randbedingungen zu erfüllen, wodurch die noch freien Konstanten bis auf eine festgelegt werden. Entsprechend der Tatsache, daß ein homogenes und lineares Gleichungssystem nur Lösungen besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, ist das Bestehen eines Zusammenhanges zwischen Frequenz und Wellenlänge der Störung vorauszusetzen. Das ist die sogenannte Dispersionsformel. Mit ihrer Hilfe kann man zwischen Stabilität und Instabilität unterscheiden. Hat man nämlich die Störung proportional $e^{\omega t}$ angesetzt, so sind drei Fälle möglich:

- $\omega^2 > 0$ und ω reell: Die Störung wächst mit der Zeit exponentiell an (Instabilität),
- $\omega^2 < 0$ und ω imaginär: Die Störung ist eine harmonische Schwingung (Stabilität),
- $\omega^2 = 0$: Grenzfall indifferenten Gleichgewichtes.

Allgemein kann man nämlich zeigen, daß der Fall der sogenannten Überstabilität (ω komplex) aus Energiegründen nicht vorkommen kann³.

* Dissertationsauszug, TH München 1960.

¹ G. LEHNER, Z. Naturforsch. 16 a, 548 [1961].

² S. LUNDQUIST, Phys. Rev. 83, 307 [1951].

³ I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMANN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc., Lond. A 244, 17 [1958].

⁴ M. KRUSKAL u. M. SCHWARZSCHILD, Proc. Roy. Soc., Lond. A 223, 348 [1954].

⁵ V. D. SHRAFRANOV, J. Nucl. Energy 5, 86 [1957].

⁶ R. J. TAYLER, Proc. Phys. Soc., Lond. B 70, 1049 [1957].

⁷ R. J. TAYLER, Proc. Phys. Soc., Lond. B 70, 31 [1957].

⁸ M. KRUSKAL u. J. L. TUCK, Proc. Roy. Soc., Lond. A 245, 222 [1958].

⁹ M. N. ROSENBLUTH, Proc. 3. Internat. Kongr. üb. ion. Gase, Venedig 1957, S. 903.



1. Herleitung der Dispersionsformel

Zunächst soll nun die Dispersionsformel abgeleitet werden. Dies geschieht in Analogie zu KRUSKAL und TUCK⁸, deren Bezeichnungen zum Zwecke des leichteren Vergleichs weitgehend beibehalten wurden.

a) Grundgleichungen

Es sollen ohne Begründung und ohne Diskussion des Gültigkeitsbereiches (hierzu sei auf SPITZER¹⁰ verwiesen) die magnetohydrodynamischen Grundgleichungen in folgender Form verwendet werden:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = j \times \mathfrak{B} + \varepsilon \mathfrak{E} - \nabla p \quad (1)$$

(Bewegungsgleichung)

$$\mathfrak{E} + v \times \mathfrak{B} = 0 \quad (2)$$

(OHMSches Gesetz für unendliche Leitfähigkeit)

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0, \quad (3) \quad \text{div } \mathfrak{E} = 4\pi c^2 \varepsilon, \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathfrak{B} = 4\pi j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad (5) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \quad (6)$$

(MAXWELLSche Gleichungen);

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (7)$$

(Massenkontinuitätsgleichung);

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\kappa}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (8)$$

(adiabatisches Kompressionsgesetz).

Dabei ist ρ die Massendichte des Plasmas, v seine Geschwindigkeit und p sein Druck, κ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen, j die Stromdichte, ε die elektrische Ladungsdichte im Plasma, \mathfrak{E} das elektrische und \mathfrak{B} das magnetische Feld.

Für das Vakuum reduzieren sich diese Gleichungen auf die MAXWELLSchen Gleichungen (3) bis (6) mit $j=0$ und $\varepsilon=0$.

Ferner werden die schon erwähnten KRUSKAL-SCHWARZSCHILDschen Sprungbedingungen für die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Plasmen bzw. zwischen Plasma und Vakuum benötigt. Sie ergeben sich im wesentlichen durch Integration über eine Schicht endlicher Dicke und anschließenden Grenzübergang für kleine Schichtdicke. Näheres darüber ist bei KRUSKAL und SCHWARZSCHILD⁴ bzw. bei KRUSKAL und TUCK⁸ gesagt, wo eine zunächst fehlerhaft angegebene Sprungbedingung korrigiert wird.

Es sei j^* die Flächenstromdichte (Strom pro cm), ε^* die Flächenladung (Ladung pro cm²) in der Sprungfläche. Es bedeute

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

den Mittelwert irgendeiner beliebigen Größe q aus ihrem Wert auf der einen Seite der Sprungfläche (q_1) und dem auf der anderen Seite (q_2).

$$[q] = q_1 - q_2$$

sei die entsprechende Differenz. Schließlich sei n der in das Gebiet I hineingerichtete auf der Sprungfläche senkrecht stehende Einheitsvektor, und u sei die zu n parallele Komponente der Geschwindigkeit der Oberfläche (damit auch des an der Oberfläche befindlichen Plasmas), wenn diese sich z. B. bei einer Störung des Zustandes bewegt. Mit diesen Bezeichnungen gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$j^* \times \bar{\mathfrak{B}} + \varepsilon^* \bar{\mathfrak{E}} - n[p] = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dn}{dt} = n \times \{n \times (\nabla v) n\}, \quad (10)$$

$$n \cdot [\mathfrak{B}] = 0, \quad (11) \quad n \cdot [\mathfrak{E}] = 4\pi c^2 \varepsilon^*, \quad (12)$$

$$n \times [\mathfrak{B}] = 4\pi j^* - \frac{1}{c^2} u[\mathfrak{E}], \quad (13)$$

$$n \times [\mathfrak{E}] = u[\mathfrak{B}], \quad (14) \quad u = n \cdot v. \quad (15)$$

Einige davon – (11) bis (14) – folgen allein aus den MAXWELLSchen Gleichungen und sind aus der Elektrodynamik bekannt. (10) und (15) sind rein geometrischer Natur und für jede bewegte Oberfläche richtig. Lediglich (9) ist für die Magnetohydrodynamik typisch. Als Spezialfall (nämlich für $v=0$, $u=0$, $\mathfrak{E}=0$, $\varepsilon^*=0$) enthalten die Gleichungen die übliche Bedingung für das Gleichgewicht an einer Grenzfläche. Es ist dann nämlich

$$j^* \times \bar{\mathfrak{B}} = n[p] \quad \text{und} \quad n \times [\mathfrak{B}] = 4\pi j^*. \quad (9), (13)$$

Durch Elimination von j^* , Umformung des dadurch entstehenden dreifachen Vektorproduktes und schließlich skalare Multiplikation der entstehenden Gleichung mit n erhält man

$$\frac{1}{4\pi} (\bar{\mathfrak{B}} \cdot [\mathfrak{B}]) + [p] = 0$$

bzw. – wie behauptet – die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\mathfrak{B}_1^2}{8\pi} + p_1 = \frac{\mathfrak{B}_2^2}{8\pi} + p_2. \quad (16)$$

Bei der hier betrachteten Anordnung hat man einen Hohlzylinder aus Plasma, dessen beide Mantelflä-

¹⁰ L. SPITZER JR., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York 1956.

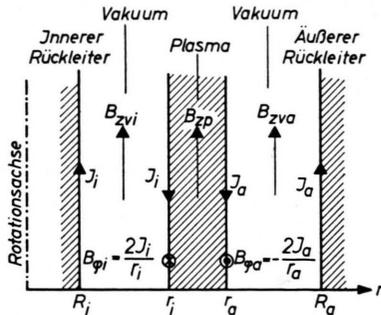


Abb. 1. Gleichgewicht beim Hohlpincheffekt (\otimes in die Papierebene hinein, \odot aus ihr heraus).

chen von Flächenströmen durchflossen sind. Innerhalb und außerhalb befindet sich je ein koaxial angeordneter Rückleiter aus Kupfer. Zwischen Rückleitern und Plasma befindet sich Vakuum. Mit den in Abb. 1 definierten Größen hat man nach (16) zunächst (d. h. vor dem Auftreten von Störungen) die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$p + \frac{B_{zp}^2}{8\pi} = \frac{B_{zva}^2}{8\pi} + \frac{B_{\varphi a}^2}{8\pi}, \quad (17)$$

und
$$p + \frac{B_{zp}^2}{8\pi} = \frac{B_{zvi}^2}{8\pi} + \frac{B_{\varphi i}^2}{8\pi}. \quad (18)$$

Es sei noch der uneinheitlichen Schreibweise wegen bemerkt, daß unter $(\nabla v)\mathfrak{n}$ in (10) das dyadische Produkt ∇v als Operator angewandt auf \mathfrak{n} zu verstehen ist, wobei aber \mathfrak{n} nicht differenziert wird, d. h.

$$(\nabla v)\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} n_x(\partial v_x/\partial x) + n_y(\partial v_y/\partial x) + n_z(\partial v_z/\partial x) \\ n_x(\partial v_x/\partial y) + n_y(\partial v_y/\partial y) + n_z(\partial v_z/\partial y) \\ n_x(\partial v_x/\partial z) + n_y(\partial v_y/\partial z) + n_z(\partial v_z/\partial z) \end{pmatrix}$$

b) Linearisierung der Grundgleichungen

Es werde nun ein Plasma betrachtet, das durch eine Sprungfläche von einem anderen Plasma oder von einem Vakuum getrennt ist. Es herrsche Gleichgewicht. Alle für dieses Gleichgewicht kennzeichnenden Größen seien durch einen Index Null gekennzeichnet: ϱ_0 , \mathfrak{B}_0 , p_0 , \mathfrak{j}_0^* ($v_0 = 0$, $\mathfrak{C}_0 = 0$, $\mathfrak{j}_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$). Nun wird dieses Gleichgewicht gestört. Alle gestörten Größen werden aus den ungestörten Gleichgewichtsgrößen und den als klein betrachteten Störungen zusammengesetzt:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \tilde{\mathfrak{B}}.$$

Dies setzt man in die Gln. (1) bis (8) ein, und alle Größen zweiter und höherer Ordnung in den Störungen werden vernachlässigt. Die Tilde \sim soll wieder weggelassen werden, da nur Gleichgewichtsgrößen

und Störungen vorkommen. Man erhält

$$\varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{B}_0 - \nabla p, \quad (19)$$

$$\mathfrak{C} + v \times \mathfrak{B}_0 = 0, \quad (20) \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0, \quad (21)$$

$$\text{div } \mathfrak{C} = 4\pi c^2 \varepsilon, \quad (22)$$

$$\text{rot } \mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}, \quad (23) \quad \text{rot } \mathfrak{C} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \text{div } v = 0, \quad (25) \quad \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (26)$$

Die an sich schon linearen MAXWELLSCHEN Gleichungen bleiben von dieser Linearisierung natürlich unberührt. Alle übrigen, zunächst nichtlinearen Gleichungen jedoch sind verändert. Konsequenterweise werden auch die Randbedingungen linearisiert, und man erhält aus (9) bis (15)

$$\mathfrak{j}_0^* \times \tilde{\mathfrak{B}} + \mathfrak{j}^* \times \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{n}[p_0] + \mathfrak{n}_0[p], \quad (27)$$

$$\frac{dn}{dt} = \mathfrak{n}_0 \times \{ \mathfrak{n}_0 \times (\nabla v) \mathfrak{n}_0 \}, \quad (28)$$

$$\mathfrak{n}[\mathfrak{B}_0] + \mathfrak{n}_0[\tilde{\mathfrak{B}}] = 0, \quad (29) \quad \mathfrak{n}_0[\mathfrak{C}] = 4\pi c^2 \varepsilon^*, \quad (30)$$

$$\mathfrak{n}_0 \times [\tilde{\mathfrak{B}}] + \mathfrak{n} \times [\mathfrak{B}_0] = 4\pi \mathfrak{j}^*, \quad (31)$$

$$\mathfrak{n}_0 \times [\mathfrak{C}] = u[\mathfrak{B}_0], \quad (32) \quad u = \mathfrak{n}_0 v. \quad (33)$$

c) Störungen im Vakuum und stabilisierender Einfluß der Rückleiter

Da es sich hier um ein zylindersymmetrisches Problem handelt, werden Zylinderkoordinaten r , φ , z eingeführt, um die elektrischen und magnetischen Störfelder im Vakuum zu berechnen. Der Zylinder wird als unendlich lang betrachtet.

Zunächst ist es nötig, die von den als unendlich leitfähig betrachteten Rückleitern herrührenden Randbedingungen zu diskutieren. Infolge der unendlichen Leitfähigkeit können in die Rückleiter weder elektrische noch magnetische Störungen eindringen, da sie sofort durch entsprechende Ströme und Ladungen aufgehoben werden. Das spielt keine Rolle für die zur Rückleiteroberfläche parallele Komponente der magnetischen und die dazu senkrechte Komponente der elektrischen Störung. Die eine führt zu einem Flächenstrom, die andere zu einer Flächenladung. Dagegen müssen aus Stetigkeitsgründen die zur Oberfläche senkrechte Komponente der magnetischen und die dazu parallele Komponente der elektrischen Störung verschwinden, d. h. für

$$r = R_0 \quad (R_0 = R_i \text{ oder } R_a) \text{ muß gelten}$$

$$B_r(R_0) = 0, \quad E_\varphi(R_0) = E_z(R_0) = 0. \quad (34) \quad (35)$$

Weil also die Komponenten B_r , E_φ , E_z von den Rückleitern sozusagen festgehalten werden, haben diese einen stabilisierenden Einfluß auf das Gleichgewicht. Die beiden Bedingungen (34) und (35) sind nicht unabhängig voneinander; (34) ist eine Folge von (35).

Man hat nun aus (21) bis (24) unter Berücksichtigung von (34) und (35) die Vakuumstörungen zu berechnen. Man kommt zu linearen und homogenen Diff.-Gln., deren Koeffizienten nur von r abhängen. In bezug auf φ , z und t macht man deshalb einen Exponentialansatz und separiert die Variablen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(r, \varphi, z, t) &= \mathfrak{E}(r) \exp\{i m \varphi + i k z + \omega t\}, \\ \mathfrak{B}(r, \varphi, z, t) &= \mathfrak{B}(r) \exp\{i m \varphi + i k z + \omega t\}; \end{aligned} \quad (36)$$

m ist aus Eindeutigkeitsgründen irgendeine ganze Zahl, und k ist die Wellenzahl der Störung in bezug auf die z -Richtung, also die reziproke Wellenlänge, bis auf den Faktor 2π , $k = 2\pi/\lambda$. $m = 0$ kennzeichnet rotationssymmetrische Lösungen, $m = 1$ bedeutet, daß die Störung auf dem ganzen Umfang gerade eine Periode hat usw. Man kann also die Störungen

nach den beiden Größen m und k klassifizieren. Beim einfachen Pincheffekt ist diese Klassifikation bereits eindeutig. Bei dem durch zwei Oberflächen gekennzeichneten Hohlpincheffekt ist dies noch nicht ganz der Fall. Zu jedem m und k gibt es noch zwei wesentlich verschiedene Störungstypen, die nicht gleichzeitig stabil bzw. instabil sein müssen. Zu jeder stabilen Störung gehört eine ganze Mannigfaltigkeit von Frequenzen, eine Grundschwingung mit ihren nicht harmonischen Oberschwingungen. Zu jeder instabilen Störung jedoch existiert nur eine einzige Wachstumsrate.

Die Diff.-Gln. für $\mathfrak{E}(r)$ und $\mathfrak{B}(r)$ lassen sich auf die BESSELSche Diff.-Gl. zurückführen. Sind I_m und K_m die modifizierten BESSEL-Funktionen und führt man als neue Variable

$$\varrho = \alpha r \quad (37)$$

$$\text{ein, wobei} \quad \alpha = |\sqrt{k^2 + (\omega^2/c^2)}|, \quad (38)$$

so erhält man mit zunächst noch willkürlichen Konstanten A und B

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{k}{i\alpha} A \left[K_m'(\varrho) - \frac{K_m'(\alpha R_0)}{I_m'(\alpha R_0)} I_m'(\varrho) \right] - \frac{m i \omega}{\alpha^2 c^2} \frac{B}{r} \left[K_m'(\varrho) - \frac{K_m(\alpha R_0)}{I_m(\alpha R_0)} I_m(\varrho) \right], \\ B_\varphi &= \frac{\omega}{\alpha c^2} B \left[K_m'(\varrho) - \frac{K_m(\alpha R_0)}{I_m(\alpha R_0)} I_m'(\varrho) \right] - \frac{m k}{\alpha^2} \frac{A}{r} \left[K_m(\varrho) - \frac{K_m'(\alpha R_0)}{I_m'(\alpha R_0)} I_m(\varrho) \right], \\ B_z &= A \left[K_m(\varrho) - \frac{K_m'(\alpha R_0)}{I_m'(\alpha R_0)} I_m(\varrho) \right], \\ E_r &= \frac{k}{i\alpha} B \left[K_m(\varrho) - \frac{K_m(\alpha R_0)}{I_m(\alpha R_0)} I_m'(\varrho) \right] + \frac{m i \omega}{\alpha^2} \frac{A}{r} \left[K_m(\varrho) - \frac{K_m'(\alpha R_0)}{I_m'(\alpha R_0)} I_m(\varrho) \right], \\ E_\varphi &= -\frac{\omega}{\alpha} A \left[K_m'(\varrho) - \frac{K_m'(\alpha R_0)}{I_m'(\alpha R_0)} I_m'(\varrho) \right] + \frac{m k}{\alpha^2} \frac{B}{r} \left[K_m(\varrho) - \frac{K_m(\alpha R_0)}{I_m(\alpha R_0)} I_m(\varrho) \right], \\ E_z &= B \left[K_m(\varrho) - \frac{K_m(\alpha R_0)}{I_m(\alpha R_0)} I_m(\varrho) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Der Strich ' bedeutet hier wie im folgenden Ableitung nach dem Argument der Funktion. Daß die Randbedingungen (34) und (35) erfüllt sind, ist den Gln. (39) unmittelbar anzusehen. Eine Verwechslung von ϱ mit der Dichte kann nicht vorkommen, da diese nie als Argument von I_m oder K_m auftaucht.

d) Störung im Plasma

Nun handelt es sich um die Lösung der Gln. (19) bis (26). Wieder erhält man lineare und homogene Gleichungen, deren Koeffizienten lediglich von r abhängen. Die Lösung erfolgt durch Separation der Variablen analog (36).

Neben der Lichtgeschwindigkeit treten zwei für das

Plasma typische Geschwindigkeiten auf, die Schallgeschwindigkeit

$$s^2 = \kappa p_0/\varrho_0 \quad (40)$$

und die ALFVÉN-Geschwindigkeit

$$h^2 = B_{z0}^2/4\pi\varrho_0. \quad (41)$$

Es ist nützlich, folgende Abkürzungen zu verwenden:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= k^2 + (\omega^2/s^2), \\ \eta^2 &= k^2 + (\omega^2/c^2) + (\omega^2/h^2), \\ \zeta^2 &= k^2 + (\omega^2/s^2) + (\omega^2/h^2). \end{aligned} \quad (42)$$

Diese Größen vertreten die im Vakuum vorkommende Größe α . Mit der neuen Variablen

$$\sigma = (\xi \eta / \zeta) r \quad (43)$$

erhält man dann für die Störungen von Druck, Ge-

schwindigkeiten, Feldern usw. im Plasma mit den beiden noch willkürlichen Konstanten P_1 und P_2

$$\begin{aligned}
 p &= P_1 K_m(\sigma) + P_2 I_m(\sigma), & \varrho &= \frac{\varrho_0}{\alpha P_0} p, & \varepsilon &= 0, \\
 v_r &= -\frac{\xi \zeta}{\omega \varrho_0 \eta} p', & v_\varphi &= -\frac{i m \xi^2}{\omega \varrho_0 \eta} \frac{1}{r} p, & v_z &= -\frac{i k}{\omega \varrho_0} p, \\
 E_r &= \frac{i m B_{z\varphi} \xi^2}{\omega \varrho_0 \eta^2} \frac{1}{r} p, & E_\varphi &= -\frac{B_{z\varphi} \xi \zeta}{\omega \varrho_0 \eta} p', & E_z &= 0, \\
 B_r &= \frac{k B_{z\varphi} \xi \zeta}{i \omega \varrho_0 \eta} p', & B_\varphi &= \frac{k B_{z\varphi} m \xi^2}{\omega^2 \varrho_0 \eta^2} \frac{1}{r} p, & B_z &= \frac{B_{z\varphi} \xi^2}{\omega^2 \varrho_0} p, \\
 j_r &= -\frac{i m}{B_{z\varphi}} \left(1 - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) p, & j_\varphi &= \frac{\eta \xi}{B_{z\varphi} \zeta} \left(1 - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) p', & j_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{44}$$

e) Die Dispersionsformel

Nun sind alle Voraussetzungen zur Ableitung der gewünschten Dispersionsformel gegeben. Man hat die Lösungen (44) im Plasma und (39) im Vakuum unter Berücksichtigung der linearisierten Randbedingungen (27) bis (33) an den beiden Grenzflächen aneinanderzufügen. Es ist dabei zu beachten, daß diese Grenzflächen selbst gestört sind, d. h. man hat die Randbedingungen nicht an den Stellen r_i bzw. r_a zu betrachten, sondern an den Stellen $r_i + \tilde{r}_i$ bzw. $r_a + \tilde{r}_a$. Wieder werden jedoch nur Terme erster Ordnung berücksichtigt. Mit $r_0 = r_i$ oder r_a ist für eine beliebige physikalische Größe Q unter Vernachlässigung des Gliedes zweiter Ordnung:

$$Q(r_0 + \tilde{r}) = Q(r_0) + Q_0'(r_0) \tilde{r}. \tag{45}$$

Dies spielt nur dann eine Rolle, wenn die ungestörte Größe Q_0 bereits von r abhängt, was nur für die azimuthalen magnetischen Felder zutrifft. Dabei ist zu beachten, daß

$$\tilde{r} = v_r / \omega. \tag{46}$$

Betrachtet man nun die Gln. (27) bis (33), so kann man u mittels (33), j^* mittels (31), ε^* mittels (30) und π mittels (28) eliminieren. Dann gewinnt man aus der azimuthalen Komponente von (32) die Konstante B

$$B = B_{\varphi 0} \frac{\xi \zeta}{\omega \varrho_0 \eta} \frac{P_1 K_m'(\sigma_0) + P_2 I_m'(\sigma_0)}{K_m(\varrho_0) - [K_m(\alpha R_0) / I_m(\alpha R_0)] I_m(\varrho_0)}, \tag{47}$$

unter σ_0 ist je nach der betrachteten Oberfläche σ_i oder σ_a zu verstehen. Dasselbe gilt auch für ϱ_0 und $B_{\varphi 0}$. Unter Verwendung von (47) gewinnt man A aus der longitudinalen Komponente von (32)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\alpha \xi \zeta}{\omega^2 \varrho_0 \eta} \left(B_{z\varphi 0} + \frac{B_{\varphi 0} m k}{\alpha^2 r_0} \right) \\
 &\cdot \frac{P_1 K_m'(\sigma_0) + P_2 I_m'(\sigma_0)}{K_m'(\varrho_0) - [K_m'(\alpha R_0) / I_m'(\alpha R_0)] I_m'(\varrho_0)}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Gl. (29) und die azimuthale und longitudinale Komponente von (27) sind dann automatisch auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Nur die radiale Komponente von (27) liefert eine weitere Bedingung:

$$\begin{aligned}
 \{P_1 K_m(\sigma_0) + P_2 I_m(\sigma_0)\} \frac{B_{z\varphi 0}^2 r_0 \eta \zeta}{B_{\varphi 0}^2 \xi} \\
 = \left\{ 1 + \left(\frac{B_{z\varphi 0}}{B_{\varphi 0}} \alpha r_0 + \frac{m k}{\alpha} \right)^2 F_m(\alpha r_0, \alpha R_0) \right. \\
 \left. + \left(\frac{\omega}{\alpha c} \right)^2 G_m(\alpha r_0, \alpha R_0) \right\} \\
 \cdot \{P_1 K_m'(\sigma_0) + P_2 I_m'(\sigma_0)\}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Zur Abkürzung wurden die beiden Funktionen F_m und G_m eingeführt:

$$\begin{aligned}
 F_m(\alpha r_0, \alpha R_0) \\
 = \frac{1}{\alpha r_0} \frac{K_m(\alpha r_0) - [K_m'(\alpha R_0) / I_m'(\alpha R_0)] I_m(\alpha r_0)}{K_m'(\alpha r_0) - [K_m'(\alpha R_0) / I_m'(\alpha R_0)] I_m'(\alpha r_0)},
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 G_m(\alpha r_0, \alpha R_0) \\
 = \alpha r_0 \frac{K_m'(\alpha r_0) - [K_m(\alpha R_0) / I_m(\alpha R_0)] I_m'(\alpha r_0)}{K_m(\alpha r_0) - [K_m(\alpha R_0) / I_m(\alpha R_0)] I_m(\alpha r_0)}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Zur späteren Verwendung sei bemerkt, daß

$$F_m(\alpha r_0, \alpha R_0)_{R_0 \rightarrow \infty} = (1/\alpha r_0) [K_m(\alpha r_0) / K_m'(\alpha r_0)], \tag{52}$$

$$F_m(\alpha r_0, \alpha R_0)_{R_0 \rightarrow 0} = (1/\alpha r_0) [I_m(\alpha r_0) / I_m'(\alpha r_0)]. \tag{53}$$

Gl. (49) ist die Dispersionsformel für eine Konfiguration, die aus einer Plasmaoberfläche (r_0) und einem Rückleiter (R_0) besteht. Für $r_0 < R_0$ und $P_1 = 0$ entsteht darauf die Dispersionsformel des normalen Pinches, der als Spezialfall ($B_{\varphi 0} \rightarrow 0$) auch die des azimuthalen Pinches enthält. Für $r_0 > R_0$ und $P_2 = 0$ dagegen entsteht die Dispersionsformel des ins Unendliche reichenden Antipinches. Reicht der Antipinch nicht ins Unendliche, dann kann man jedoch nicht $P_2 = 0$ setzen. Man hat dann das Verhältnis P_2/P_1 durch eine zusätzliche Randbedingung fest-

zulegen. Hat man als Begrenzung etwa eine ideal flexible Wand, so ist dort $p=0$ zu setzen, im Falle einer starren Wand $v_r=0$ usw.

Im Falle des Hohlpinches nun muß (49) gleichzeitig an der inneren ($0 \rightarrow i$) und an der äußeren Oberfläche ($0 \rightarrow a$) gelten. Denkt man sich beide Formeln hingeschrieben, so hat man zwei lineare und homogene Gleichungen für P_1 und P_2 , die das Verhältnis P_1/P_2 bestimmen. Sie haben nur Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Dazu werden die Variablen

$$y = |k| r_a, \quad W = \omega r_a/s \quad (54)$$

eingeführt. Ferner wird zur Vereinfachung

$$B_{\varphi i} = -B_{\varphi a} = B_{\varphi} \quad \text{und} \quad B_{zvi} = B_{zva} = B_{zv} \quad (55)$$

gesetzt, was eine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Mit den dimensionslosen Feldern

$$\alpha_p = B_{zp}/B_{\varphi}, \quad \alpha_v = B_{zv}/B_{\varphi}, \quad (56)$$

den dimensionslosen Radien

$$P = r_i/r_a, \quad Q = R_i/r_a, \quad R = R_a/r_a, \quad (57)$$

$$(R > 1 > P > Q),$$

unter Vernachlässigung aller $1/c^2$ proportionalen Glieder und mit den Abkürzungen

$$x = \sigma_a = \frac{\eta \xi}{\zeta} r_a = \frac{\sqrt{y^2 + W^2} \frac{1}{2} \kappa (1 + \alpha_v^2 - \alpha_p^2) / \alpha_p^2 \cdot \sqrt{y^2 + W^2}}{\sqrt{y^2 + W^2 + W^2} \frac{1}{2} \kappa (1 + \alpha_v^2 - \alpha_p^2) / \alpha_p^2}, \quad (58)$$

$$z = \alpha_p^2 \frac{\sqrt{y^2 + W^2} \frac{1}{2} \kappa (1 + \alpha_v^2 - \alpha_p^2) / \alpha_p^2 \cdot \sqrt{y^2 + W^2 + W^2} \frac{1}{2} \kappa (1 + \alpha_v^2 - \alpha_p^2) / \alpha_p^2}{\sqrt{y^2 + W^2}} \quad (59)$$

erhält man dann

$$\begin{aligned} & \{ z P I_m(Px) - I_m'(Px) [1 + (\alpha_v y P \pm m)^2 F_m(y, P, y Q)] \} \\ & \quad \cdot \{ z K_m(x) - K_m'(x) [1 + (-\alpha_v y \pm m)^2 F_m(y, y R)] \} \\ & - \{ z I_m(x) - I_m'(x) [1 + (-\alpha_v y \pm m)^2 F_m(y, y R)] \} \\ & \quad \cdot \{ z P K_m(Px) - K_m'(Px) [1 + (\alpha_v y P \pm m)^2 F_m(y, P, y Q)] \} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

2. Diskussion der Dispersionsformel in einigen Grenzfällen

a) Große Wellenzahlen

Für große Argumente sind die modifizierten BESSEL-Funktionen K_m und I_m im wesentlichen Exponentialfunktionen:

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4m^2-1}{8x} + \frac{(4m^2-1)(4m^2-9)}{2!(8x)^2} - \dots \right), \\ I_m'(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4m^2+3}{8x} + \frac{(4m^2-1)(4m^2+15)}{2!(8x)^2} - \dots \right), \\ K_m(x) &= \sqrt{\pi/2x} e^{-x} \left(1 + \frac{4m^2-1}{8x} + \frac{(4m^2-1)(4m^2+9)}{2!(8x)^2} + \dots \right), \\ K_m'(x) &= -\sqrt{\pi/2x} e^{-x} \left(1 + \frac{4m^2+3}{8x} + \frac{(4m^2-1)(4m^2+15)}{2!(8x)^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Da $P < 1$, braucht man dann in (60) nur noch die Terme

$$K_m(Px) I_m(x), \quad K_m'(Px) I_m(x), \quad K_m(Px) I_m'(x) \\ \text{und} \quad K_m'(Px) I_m'(x)$$

die sich wie $e^{x(1-P)}$ verhalten, beizubehalten, die übrigen verhalten sich wie $e^{-x(1-P)}$.

Ferner ist dann wegen $P > Q$ bzw. $R > 1$

$$F_m(y, P, y Q) = (1/y P) [I_m(y P) / I_m'(y P)],$$

$$F_m(y, y R) = (1/y) [K_m(y) / K_m'(y)]. \quad (62)$$

Die Parameter R und Q spielen also keine Rolle mehr.

Gl. (60) läßt sich nun als Produkt schreiben, d. h. man erhält zwei Dispersionsformeln für zwei verschiedene Störungstypen, entweder ist

$$z \frac{I_m(x)}{I_m'(x)} = 1 + (-\alpha_v y \pm m)^2 \frac{1}{y} \frac{K_m(y)}{K_m'(y)} \quad \text{oder} \quad (63)$$

$$z P \frac{K_m(Px)}{K_m'(Px)} = 1 + (\alpha_v P y \pm m)^2 \frac{1}{y P} \frac{I_m(y P)}{I_m'(y P)}. \quad (64)$$

Nach (49) und der dazu gemachten Bemerkung han-

delt es sich um die entsprechenden Grenzfälle der Dispersionsformel des Pinches (63) und des Antipinches (64). Man kann also sagen, daß für genügend große Wellenzahlen (genügend kleine Wellenlängen) zwei Arten von Störungen auftreten: Die eine entspricht den Störungen des normalen Pincheffektes, dessen Oberfläche die Außenfläche des Hohlpinches ist. Die Innenfläche hat keinen Einfluß. (63) ist darum auch von P unabhängig. Die andere entspricht den Störungen des Antipinches, dessen Oberfläche die Innenfläche des Hohlpinches ist. In diesem Falle hat die Außenfläche keinen Einfluß. Anders ausgedrückt: Die beiden Oberflächen des Hohlpinches erscheinen in bezug auf sehr kleine Wellenlängen voneinander entkoppelt. Jede Oberfläche verhält sich, als ob die andere nicht vorhanden wäre.

Nun soll der einfachste Fall $\alpha_p = \alpha_v = 0$ betrachtet werden. Dann ist nach (59)

$$x = \sqrt{y^2 + W^2}$$

und nach (60)

$$z = \frac{1}{2} \kappa W^2 / \sqrt{y^2 + W^2}.$$

Da nach (61) $\frac{I_m(x)}{I_m'(x)} = 1 + (1/2 x) \dots$ (65)

und $\frac{K_m(x)}{K_m'(x)} = -1 + (1/2 x) \dots$, (66)

erhält man aus (63)

$$W^2 = \frac{2}{\kappa} y + \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{2m^2+1}{\kappa} \right) \dots \dots \quad (67)$$

Man findet also Instabilitäten, deren Wachstumsraten mit zunehmender Wellenzahl y zunehmen, mit zunehmendem m dagegen abnehmen. Dieses Verhalten ist vom linearen Pinch her bekannt. Aus (64) ergibt sich analog

$$W^2 = -\frac{1}{P^2} \left\{ \frac{2}{\kappa} P y - \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{2m^2+1}{\kappa} \right) \right\}. \quad (68)$$

Es handelt sich also um stabile Schwingungen, deren Frequenz mit zunehmender Wellenzahl und mit zunehmendem m wächst. Tatsächlich ist ja der Antipinch für alle m und k stabil.

Nun sei der Fall $\alpha_p \neq 0$, $\alpha_v \neq 0$, allerdings nur in bezug auf die Grenzen zwischen Stabilität und Instabilität, diskutiert, d. h. es sei $W = 0$ gesetzt. Dann ist nach (58) und (59)

$$x = y, \quad z = \alpha_p^2 y. \quad (69)$$

Aus (63) ergibt sich so bis zur ersten Ordnung

$$\alpha_p^2 = -\alpha_v^2 + (\alpha_v^2 \pm 2m\alpha_v + 1)/y. \quad (70)$$

Ist α_p^2 größer als dieser Wert, dann ist das Gleichgewicht stabil, ist er dagegen kleiner, so ist es instabil.

Aus (64) ergibt sich wiederum bis zur ersten Ordnung

$$\alpha_p^2 = -\alpha_v^2 - (\alpha_v^2 \pm 2m\alpha_v + 1)/y P. \quad (71)$$

Dieser Wert ist stets negativ, d. h. das Gleichgewicht ist stets stabil auch ohne die Überlagerung eines longitudinalen Feldes.

Unter Verwendung von (46) und (44) läßt sich das Verhältnis der radialen Verschiebung der beiden Oberflächen durch die beiden Störungstypen berechnen. Im einen Fall erhält man aus (63)

$$\tilde{r}_a/\tilde{r}_i \sim e^{x(1-P)}, \quad \tilde{r}_i \ll \tilde{r}_a, \quad (72)$$

im anderen aus (64)

$$\tilde{r}_a/\tilde{r}_i \sim e^{-x(1-P)}, \quad \tilde{r}_a \ll \tilde{r}_i. \quad (73)$$

Dies ist so zu interpretieren, daß die Störung von einer Oberfläche ausgehend zur anderen hin exponentiell abnimmt, wobei die Eindringtiefe von der Größenordnung der Wellenlänge ist. Das ist auch anschaulich zu verstehen. Zum Ausgleich einer von einer der Oberfläche ausgehenden Störungen sind stets Bewegungen von Massen erforderlich, die sich über ein Gebiet von einer Dimension der Wellenlänge erstrecken (Abb. 2). Auch die Unabhängigkeit

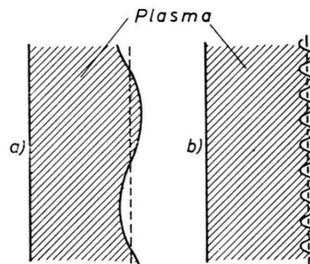


Abb. 2. Störung der Oberfläche für kleine (a) und große (b) Wellenzahl k .

von R und Q erklärt sich auf analoge Weise. Die Rückleiter haben keinen stabilisierenden Einfluß auf Störungen sehr kleiner Wellenlänge, da auch die Störungen im Vakuum dann nur geringe Eindringtiefe haben. Die Kopplung zwischen den Plasmaoberflächen und den Rückleitern ist gering.

b) Kleine Wellenzahlen

Nun sei die Grenze zwischen Stabilität und Instabilität für kleine Wellenzahlen behandelt. Zu-

nächst sei der Fall $m = 0$ betrachtet. Der Einfachheit halber wird nur die niedrigste Ordnung beibehalten:

$$\begin{aligned} I_0(y) &= 1, & K_0(y) &= -(\nu + \ln y/2), \\ I_0'(y) &= y/2, & K_0'(y) &= -(1/y), \end{aligned} \quad (74)$$

wo $\nu = 0,57721$. (75)

Aus (50) und (74) ergibt sich

$$\begin{aligned} F_0(yP, yQ) &= (2/y^2) [1/(P^2 - Q^2)], \\ F_0(y, Ry) &= (2/y^2) [1/(R^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (76)$$

Im Unterschied zum vorigen Abschnitt (große Wellenzahlen) ist hier ein Einfluß der Rückleiter auf das Stabilitätsverhalten vorhanden. Für $W = 0$ gilt wiederum (69).

Setzt man all dies in (60) ein, so ergeben sich zwei verschiedene Lösungen, nämlich

$$\alpha_p^2 = -\frac{1}{y^2 P \ln(1/P)} \left\{ \left[1 + \frac{2\alpha_v^2}{1 - (Q^2/P^2)} \right] - P^2 \left[1 - \frac{2\alpha_v^2}{R^2 - 1} \right] \right\} \quad (77)$$

bzw.

$$\alpha_p^2 = \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{1-P}{P} \left[1 + \frac{2\alpha_v^2}{1 - (Q^2/P^2)} \right] \left[1 - \frac{2\alpha_v^2}{R^2 - 1} \right] \right]}{\frac{1}{P} \left[1 + \frac{2\alpha_v^2}{1 - (Q^2/P^2)} \right] - P \left[1 - \frac{2\alpha_v^2}{R^2 - 1} \right]}. \quad (78)$$

In beiden Fällen führt die Erhöhung von α_v oder Q bzw. Erniedrigung von R zu einer Erniedrigung von α_p^2 . Das heißt, die Erhöhung des Vakuumfeldes oder das Näherücken der Rückleiter hat einen stabilisierenden Einfluß. (77) gibt stets negatives α_p^2 , was keiner Instabilität entspricht. (78) dagegen liefert für nicht genügend große α_v positives α_p^2 . Ein entsprechendes Feld muß man dann anlegen, um die Instabilität gerade zu unterdrücken. Für $\alpha_v = 0$ ist übrigens wie beim normalen Pinch $\alpha_p^2 = \frac{1}{2}$.

Für $m \geq 1$ dagegen ist

$$\begin{aligned} I_m(y) &= (1/m!) (y/2)^m, \\ I_m'(y) &= (1/(m-1)!) \frac{1}{2} (y/2)^{m-1}, \\ K_m(y) &= (m-1)! \frac{1}{2} (y/2)^{-m}, \\ K_m'(y) &= -m! \frac{1}{2} (y/2)^{-m-1}. \end{aligned} \quad (79)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} F_m(yP, yQ) &= (1/m) \cdot (P^{2m} + Q^{2m}) / (P^{2m} - Q^{2m}), \\ F_m(y, yR) &= -(1/m) \cdot (R^{2m} + 1) / (R^{2m} - 1), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{p1,2}^2 &= -\frac{m}{2y^2} \left\{ \frac{1+P^{2m}}{1-P^{2m}} \left[\frac{1}{P^2} \left(m \frac{P^{2m}+Q^{2m}}{P^{2m}-Q^{2m}} + 1 \right) + \left(m \frac{R^{2m}+1}{R^{2m}-1} - 1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left(\frac{1+P^{2m}}{1-P^{2m}} \right)^2 \left[\frac{1}{P^2} \left(m \frac{P^{2m}+Q^{2m}}{P^{2m}-Q^{2m}} + 1 \right) + \left(m \frac{R^{2m}+1}{R^{2m}-1} - 1 \right) \right]^2 - \frac{4}{P^2} \left(m \frac{P^{2m}+Q^{2m}}{P^{2m}-Q^{2m}} + 1 \right) \left(m \frac{R^{2m}+1}{R^{2m}-1} - 1 \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

und man erhält aus (60)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_v^4 y^2 P}{m} - \alpha_p^2 P \frac{(1+P^{2m})}{(1-P^{2m})} \left(1 - m \frac{R^{2m}+1}{R^{2m}-1} \right) \\ + \frac{\alpha_v^2}{P} \frac{(1+P^{2m})}{(1-P^{2m})} \left(1 + m \frac{P^{2m}+Q^{2m}}{P^{2m}-Q^{2m}} \right) \\ - \frac{m}{P y^2} \left(1 - m \frac{R^{2m}+1}{R^{2m}-1} \right) \left(1 + m \frac{P^{2m}+Q^{2m}}{P^{2m}-Q^{2m}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Für große m hat man eine ähnliche Situation wie für große Wellenzahlen. Wegen $P < 1$, $R > 1$, $P > Q$ erhält man nämlich

$$\left(\alpha_p^2 y - \frac{m(1-m)}{y} \right) \left(\alpha_p^2 y \frac{P}{m} + \frac{1+m}{yP} \right) = 0. \quad (82)$$

Wieder haben die metallischen Rückleiter keinen Einfluß und wieder kann man separieren.

Entweder ist

$$\alpha_p^2 = -m(m-1)/y^2 \quad (83)$$

oder $\alpha_p^2 = -m(m+1)/y^2 P^2. \quad (84)$

In beiden Fällen hat man als Stabilität. (83) ergibt sich auch für kleine y und große m im Falle des normalen Pinches, (84) ebenso im Falle des Antipinches. Wieder sind also die beiden Oberflächen voneinander entkoppelt. Der Grund dafür ist derselbe wie früher. Es handelt sich jetzt lediglich um die azimutale Wellenlänge, $\lambda = 2\pi r/m$, die klein wird, wenn m groß wird (Abb. 3).

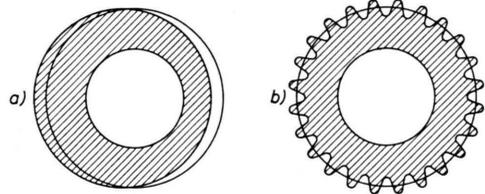


Abb. 3. Störung z. B. der äußeren Oberfläche für $m=1$ (a) und große (b) azimutale Wellenzahl m .

Aus (83) bzw. (84) ergibt sich, daß die Stabilität mit m zunimmt. Zu der hier diskutierten Separation ist lediglich nötig, daß

$$(1 + P^{2m}) / (1 - P^{2m}) \rightarrow 1$$

geht. Dies ist bei gegebenem m um so besser erfüllt, je kleiner P ist. Dies ist anschaulich klar. Je kleiner P ist, desto weiter sind die beiden Oberflächen voneinander entfernt.

Ist m nicht groß, so hat man Gl. (81) zu diskutieren. Sie hat zwei Lösungen

Für alle m und alle endlichen Werte von R sind beide Werte, $\alpha_{p_1}^2$ und $\alpha_{p_2}^2$, negativ. Es handelt sich um zwei stabile Schwingungsarten. Lediglich im Falle $m=1$ und für $R \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\alpha_{p_1}^2 = - (1/y^2) \cdot [(1+P^2)/(1-P^2)] \cdot [2/(P^2-Q^2)] \quad (86)$$

$$\text{und} \quad \alpha_{p_2}^2 = 0. \quad (87)$$

Man hat also eine stabile und eine indifferente Störung. Das trifft aber nur in dieser niedrigsten Ordnung der Näherung zu. Um eine Aussage über das tatsächliche Verhalten der zunächst indifferenten zweiten Störung zu gewinnen, muß man die Entwicklung zu höheren Ordnungen weiterführen. Man erhält dann

$$\alpha_{p_2}^2 = \pm (2 \alpha_v/y) \cdot (1-P^2)/(1+P^2) \quad (88)$$

bzw. wenn auch $\alpha_v=0$ in der wiederum nächsthöheren Ordnung

$$\alpha_{p_2}^2 = - (\nu + \ln \frac{1}{2} y) \cdot (1-P^2)/(1+P^2). \quad (89)$$

In (88) bezieht sich das positive Vorzeichen auf positive Wellenzahlen, das negative Vorzeichen auf negative Wellenzahlen. Vom Vorzeichen von k hängt der Schraubensinn der Störung ab. Umgekehrt ist auch durch das azimutale Feld zusammen mit dem überlagerten longitudinalen Feld ein Schraubensinn ausgezeichnet. Die Störung desselben Schraubensinnes ist die instabilere, ein Effekt, den man auch beim normalen Pinch findet. Der physikalische Grund ist, daß die Störung instabiler ist, die eine geringere Verlängerung der magnetischen Kraftlinien erfordert. (88) zeigt, daß man auch durch beliebig große $\alpha_{p_2}^2$ keine Stabilisierung erreichen kann, wenn man nicht den äußeren Rückleiter zu Hilfe nimmt. Darüber hinaus ist zu beachten, daß wegen der Gleichgewichtsbedingung

$$\alpha_p^2 + (8 \pi p/B\varphi^2) = 1 + \alpha_v^2,$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha_p^2 \ll 1 + \alpha_v^2$$

sein muß. Ferner folgt aus (88), daß das Vakuumfeld die Instabilitäten fördert. Es ist am besten $\alpha_v=0$ zu machen. Dadurch werden die Instabilitäten zwar nicht beseitigt, wie sich aus (89) ergibt ($y < 1$, $\ln y < 0$). Immerhin wird die Divergenz von $\alpha_{p_2}^2$ schwächer (nämlich logarithmisch).

Die Fälle $m=0$ und $m=1$ mußten getrennt behandelt werden. Dies hat zunächst formale Gründe, wie man an den ersten Gliedern der Reihenentwicklungen (74) bzw. (79) sieht. Dahinter steckt aber ein wesentlicher physikalischer Unterschied. Ver-

gleicht man z. B. die Formeln (77) und (78) mit (85), so fällt daran auf, daß ein longitudinales Vakuumfeld α_v in der hier behandelten niedrigsten Ordnung wohl einen stabilisierenden Einfluß auf $m=0$ -Instabilitäten hat, nicht aber auf $m=1$ -Instabilitäten. Woran liegt das?

Der stabilisierende Einfluß der überlagerten longitudinalen Felder hat zwei verschiedene Gründe. Einerseits muß Energie aufgewandt werden, wenn die Kraftlinien gekrümmt und dadurch verlängert (gespannt) werden; andererseits muß Energie aufgewandt werden, wenn ein Feld komprimiert wird. Von der Krümmung der Kraftlinien rührt der Einfluß her, den das longitudinale Vakuumfeld im Falle großer Wellenzahlen hat. Im Falle kleiner Wellenzahlen jedoch spielt dieser Effekt in der niedrigsten Ordnung keine Rolle. Es kommt dann auf Volumenänderung bzw. Querschnittsänderungen an. Dadurch nun unterscheiden sich die $m=0$ -Störungen von den übrigen Störungen, daß sie allein mit solchen Änderungen verknüpft sind.

c) Der Sonderfall $m=0, k=0$

Der Fall $m=0, k=0$ bedarf einer besonderen Behandlung. Er ist in (60) nicht enthalten. Es handelt sich u. a. um die früher¹ diskutierten Schwingungen, und ein Vergleich der dortigen Ergebnisse mit denen einer magnetohydrodynamischen Behandlung erscheint interessant.

Der Verschiebungsstrom sei von Anfang an vernachlässigt. Dann erhält man für die Störungen im Vakuum mit den Integrationskonstanten A, B und C

$$B_r = 0, \quad B_\varphi = B/r, \quad B_z = A, \quad E_r = C, \quad (90)$$

$$E_\varphi = (\omega A/2) \cdot (R_0^2 - r^2)/r, \quad E_z = \omega B \ln(r/R_0),$$

und für die Störungen im Plasma

$$p = P_1 K_0(\sigma) + P_2 I_0(\sigma), \quad \varepsilon = 0,$$

$$v_r = - (\sqrt{h^2 + s_2^2}/Q_0 s^2) p', \quad v_\varphi = v_z = 0,$$

$$E_r = E_z = 0, \quad E_\varphi = -B_{zP} (\sqrt{h^2 + s^2}/Q_0 s^2) p',$$

$$B_r = B_\varphi = 0, \quad B_z = (B_{zP}/Q_0 s^2) p,$$

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\varphi = - \frac{\omega h^2}{B_{zP} s^2 \sqrt{s^2 + h^2}}, \quad (91)$$

$$\text{wo} \quad \sigma = \omega r / \sqrt{h^2 + s^2}. \quad (92)$$

Der Normalenvektor $\tilde{n}_0 + \tilde{n}$ ist bei einer Störung der hier diskutierten Art ungestört, d. h. es ist stets

$$\tilde{n} \equiv n = 0. \quad (93)$$

Dadurch vereinfachen sich die linearen Randbedin-

gungen (27) bis (33) zu

$$j_0^* \times \mathfrak{B} + j^* \times \overline{\mathfrak{B}}_0 = n_0 [p], \quad (94)$$

$$n_0 [\mathfrak{B}] = 0, \quad n_0 [\mathfrak{C}] = 4 \pi c^2 \varepsilon^*, \quad (95) \quad (96)$$

$$n_0 \times [\mathfrak{B}] = 4 \pi j^*, \quad n_0 \times [\mathfrak{C}] = (n_0 v) [\mathfrak{B}_0]. \quad (97) \quad (98)$$

(95) ist automatisch erfüllt, da das magnetische Störfeld nach (90) keine radiale Komponente hat. (96) legt lediglich ε^* fest und braucht nicht beachtet zu werden. Mit Hilfe von (97) wird j^* aus (94) eliminiert. Benutzt man noch, daß wegen (13)

$$j_0^* = (1/4 \pi) n_0 \times [\mathfrak{B}_0] \quad (99)$$

ist, so erhält man als radiale Komponente von (94) – die beiden anderen Komponenten liefern nichts – nach einigen Umformungen und wegen

$$n_0 \overline{\mathfrak{B}} = n_0 \overline{\mathfrak{B}}_0 = 0 \quad \text{schließlich}$$

$$(1/4 \pi) \{ ([\mathfrak{B}_0] \overline{\mathfrak{B}}) + ([\mathfrak{B}] \overline{\mathfrak{B}}_0) \} + p = 0. \quad (100)$$

Setzt man die entsprechenden Feldgrößen ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{4 \pi} \left\{ \frac{B_{\varphi_0}^2 v_r(\sigma_0)}{\omega r_0} + \frac{B_{z p}^2 p(\sigma_0)}{\varrho_0 s^2} - A B_{z v 0} - B \frac{B_{\varphi_0}}{r_0} \right\} + p(\sigma_0) = 0. \quad (101)$$

Die beiden Konstanten A und B bestimmen sich aus der letzten noch übrigen Gl. (98) zu

$$A = \frac{2 B_{z v 0} r_0 v_r(\sigma_0)}{\omega (R_0^2 - r_0^2)}, \quad B = \frac{B_{\varphi_0} v_r(\sigma_0)}{\omega \ln(R_0/r_0)}. \quad (102)$$

Insgesamt erhält man aus (101) und (102)

$$\sigma_0 p(\sigma_0) + \frac{h^2}{\alpha_p^2 (s^2 + h^2)} \left(\frac{2 \alpha_v^2 r_0^2}{R_0^2 - r_0^2} + \frac{1}{\ln(R_0/r_0)} - 1 \right) p'(\sigma_0) = 0. \quad (103)$$

Aus der entsprechenden Gl. (49) erhält man für $m=0$ und $k \rightarrow 0$ die Gl. (103) nur bis auf das Glied $1/\ln(R_0/r_0)$, weshalb die gesonderte Behandlung nötig ist. Man hat nun Gl. (103) gleichzeitig für die äußere und die innere Oberfläche anzuwenden, was zwei homogene und lineare Gleichungen für P_1 und P_2 ergibt, die nur lösbar sind, wenn

$$\begin{aligned} & P x^2 [K_0(P x) I_0(x) - K_0(x) I_0(P x)] \\ & + T_a P x [K_0'(x) I_0(P x) - K_0(P x) I_0'(x)] \\ & + T_i x [K_0(x) I_0'(P x) - K_0'(P x) I_0(x)] \\ & + T_i T_a [K_0'(P x) I_0'(x) - K_0'(x) I_0'(P x)] = 0, \end{aligned} \quad (104)$$

wo $P = r_i/r_a$, $x = \sigma_a = \omega r_a/\sqrt{s^2 + h^2}$,

$$T_i = \frac{h^2}{\alpha_p^2 (s^2 + h^2)} \left(1 + \frac{2 \alpha_v^2 r_i^2}{r_i^2 - R_i^2} + \frac{1}{\ln(r_i/R_i)} \right),$$

$$T_a = \frac{h^2}{\alpha_p^2 (s^2 + h^2)} \left(1 - \frac{2 \alpha_v^2 r_a^2}{R_a^2 - r_a^2} - \frac{1}{\ln(R_a/r_a)} \right). \quad (105)$$

Die Lösungen der Gl. (104) lassen sich formal als Funktion der drei Parameter T_i , T_a und P schreiben:

$$x = x(T_i, T_a, P) \quad (106)$$

$$\text{bzw.} \quad \omega^2 = \frac{h^2 + s^2}{r_a^2} x^2 = \frac{(B_{z p}^2/4 \pi \varrho_0) + (\varkappa p_0/\varrho_0)}{r_a^2} x^2$$

und für $\varkappa = 2$

$$\omega^2 = \frac{p_0 + (B_{z p}^2/8 \pi)}{\pi \varrho_0 (r_a^2 - r_i^2)} \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2} 2 \pi x^2 \sim \frac{p_0 + (B_{z p}^2/8 \pi)}{\alpha M}. \quad (107)$$

Das ist genau die früher¹ für die Frequenzen gefundene Form. Allerdings ist zu beachten, daß in der Definition von ω eine Verschiedenheit um einen Faktor i besteht. Man kann zeigen, daß (104) nur imaginäre Lösungen x besitzt, d. h. daß die Störungen $m=0$, $k=0$ stabil sind. Dies liegt an dem zusätzlichen Term $1/\ln(R_0/r_0)$, der bereits erwähnt wurde. Anschaulich ist es so, daß bei einer Störung der Plasmaoberfläche eine longitudinale Spannung induziert wird, die einen Strom hervorruft, dessen Magnetfeld eine rücktreibende Kraft erzeugt. Hier liegt auch der Grund dafür, daß man die Störung $m=0$, $k=0$ nicht aus der allgemeinen Dispersionsformel gewinnen kann, indem man die Grenze $m=0$, $k \rightarrow 0$ betrachtet. So klein man k auch macht, immer bleibt die Störung periodisch. Damit ist auch E_z periodisch, und die longitudinale Spannung verschwindet zusammen mit der von ihr stammenden rücktreibenden Kraft. So ist also das Verhalten von $m=0$ -Störungen für unendliche Wellenlänge prinzipiell von dem für beliebig große Wellenlängen verschieden. Es gibt eine Vielzahl von Lösungen, die man mit den beiden Grundschwingungen und deren Oberschwingungen identifizieren kann. Die Frequenzen der Oberschwingungen sind dabei allerdings keine ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingungsfrequenzen, da es sich hier um BESSEL-Funktionen und nicht um Winkelfunktionen handelt.

Gl. (129) enthält als Spezialfälle den linearen Pinch,

$$\sigma_0 I_0(\sigma_0) = T_a I_0'(\sigma_0), \quad (108)$$

den Antipinch

$$\sigma_0 K_0(\sigma_0) = T_i K_0'(\sigma_0) \quad (109)$$

und den azimutalen Pinch

$$\sigma_0 I_0(\sigma_0) + \frac{B_{z v}^2 2 r_0^2}{(4 \pi \varkappa p_0 + B_{z p}^2) (R_0^2 - r_0^2)} I_0'(\sigma_0) = 0. \quad (110)$$

So wird verständlich, daß sich in allen diesen Fällen

die Frequenzen der Kompressionschwingungen ebenfalls in der Form (107) ergeben.

3. Einige numerische Ergebnisse

Bisher wurden nur Grenzfälle der Dispersionsformel diskutiert, nämlich die sehr großer und sehr kleiner Wellenzahlen. Im Bereich mittlerer Wellenzahlen ist man auf numerische Rechnungen angewiesen. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, wurde nur das indifferente Gleichgewicht $W=0$ untersucht (d. i. die Grenze zwischen Stabilität und Instabilität), und zwar im ungünstigsten Falle $Q=0$ und $R \rightarrow \infty$. Mit $W=0$ gilt (69) und man kann (60) als quadratische Gleichung für α_p^2 auffassen. Sie hat zwei Lösungen, von denen eine stets negativ ist. Dies bedeutet, daß die zugehörige Störung stabil ist, so daß diese Lösung nicht weiter interessiert. Die zweite Lösung kann positive oder negative Werte annehmen. Ein positiver Wert bedeutet, daß man ein entsprechendes Feld anlegen muß, um die Instabilität gerade zu beseitigen. Um die Störung stabil zu machen, bedarf es dann eines Feldes, das etwas größer als α_p ist. Abb. 4 behandelt den Fall $m=0$ für y -Werte von 1 bis 6 und α_v -Werte von 0 bis 0,9 für drei verschiedene Fälle von P ($P=0,1$; $P=0,5$; $P=0,9$). Man sieht, daß α_p^2 mit zunehmendem α_v abnimmt. Auf das Vorzeichen von α_v kommt es nicht an. Das Vakuumfeld hat also einen stabilisierenden Einfluß. Abb. 5 bringt den Fall $m=1$ für dieselben Parameter. Es zeigt sich ein interessantes Verhalten, das man auf Grund der diskutierten Grenzfälle verstehen kann. Für große Wellenzahlen hat das Vakuumfeld α_v unabhängig vom Vorzeichen stets einen stabilisierenden Einfluß. Im Falle kleiner Wellenzahlen dagegen entscheidet das Vorzeichen von α_v , ob es einen stabilisierenden oder einen destabilisierenden Einfluß hat (letzten Endes kommt es natür-

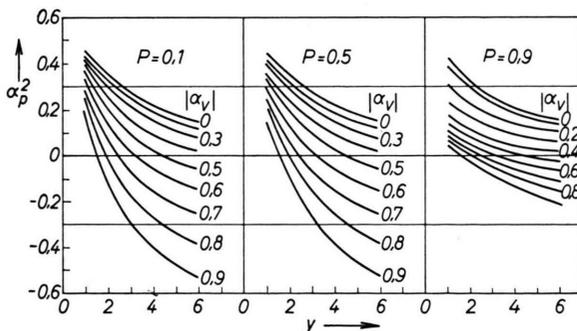


Abb. 4. Numerische Werte für α_p^2 im Fall $m=0$.

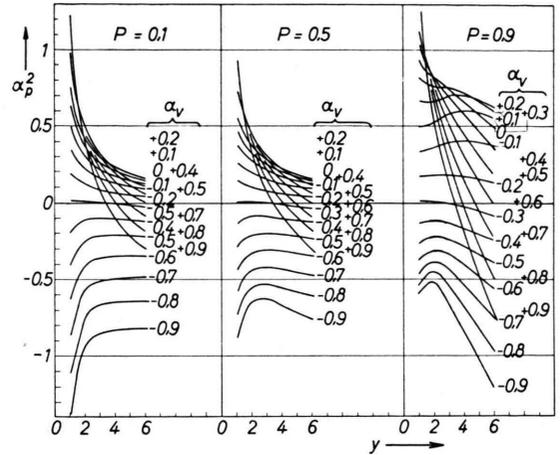


Abb. 5. Numerische Werte für α_p^2 im Fall $m=1$.

lich immer auf den destabilisierenden Einfluß an; es bildet sich gerade die Instabilität aus, die einen solchen Schraubensinn hat, daß das gegebene Feld α_v destabilisierend wirkt). Man kann an der Abb. 5 sehen, wie die Grenzfälle ineinander übergehen. Für größere Werte von y würden sich jeweils alle Kurvenpaare, die demselben α_v dem Betrag nach entsprechen, einander asymptotisch nähern.

Insgesamt kann man sich folgende Vorstellung machen. Man hat zwei Plasmaoberflächen, die untereinander und mit den metallischen Leitern verkopelt sind. Die Kopplung hängt von der Art der Störung, d. h. von m und k derart ab, daß sie für große m oder k klein, für kleine m und k groß ist. Die Kopplung an den äußeren Rückleiter ist besonders wichtig. Ohne diesen äußeren Rückleiter nämlich ist eine volle Stabilität nicht möglich. Er muß nahe genug am Plasma sein. Dies ist auch beim normalen Pinch der Fall. Nach ROSENBLUTH⁹ muß beim normalen Pinch der dimensionslose Rückleiterabstand $R \leq 5$ sein. Wie groß R beim Hohlpinch höchstens sein darf, geht aus den durchgeführten Rechnungen nicht hervor. Es kommt aber nicht so sehr auf den Zahlenwert an. Es besteht nämlich ein grundlegender Unterschied zwischen Hohlpinch und normalem Pinch: Beim normalen Pinch beschränkt die ROSENBLUTHSCHE Forderung das Kompressionsverhältnis des Plasmas. Beim Hohlpinch dagegen hat die Größe von R nichts mit dem Kompressionsverhältnis zu tun. Auch im hochkomprimierten Zustand des Plasmas kann man R klein genug halten.

Abschließend sei gesagt, daß die hier durchgeführte Methode eine Lücke hat. Seit einer anderen Arbeit von ROSENBLUTH¹¹ weiß man, daß es Stö-

rungstypen gibt, die von dieser Methode nicht erfaßt werden, und die von der Struktur der Plasmaoberfläche selbst dann noch abhängen, wenn diese als unendlich dünn betrachtet wird. NEWCOMB und KAUFMAN¹² haben, von der eingangs erwähnten Methode des Energieprinzips ausgehend, diese Störungen zweiter Art für den Hohlpinch mit berücksichtigt. Dafür haben sie aber andere Einschränkungen gemacht. Sie betrachten nur eine unendlich dünne

Plasmaschicht, d. h., die hier P genannte Größe ist nur infinitesimal von 1 verschieden. So ist ein unmittelbarer Vergleich ihrer Arbeit mit der vorliegenden nicht möglich.

Ich danke Herrn Prof. Dr. E. FÜNFER, der mir diese Arbeit ermöglichte, Herrn Dr. K. HAIN und Herrn Dr. R. CHODURA für anregende Diskussionen sowie Herrn W. GUTMANN für die Durchführung der numerischen Rechnung mit der G 2 des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik.

¹¹ M. N. ROSENBLUTH, Proc. 2. Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Genf 1958, Bd. 31, S. 85.

¹² W. A. NEWCOMB u. A. N. KAUFMAN, Univ. California Rad. Lab. UCRL 5434 (1960).

NOTIZEN

On the Effective Ionization Potential of Atoms in the Interior of a Plasma

By DONALD P. DUCLOS* and ALI BULENT CAMEL

Gas Dynamics Laboratory, Northwestern University,
Evanston, Illinois, U.S.A.

(Z. Naturforschg. 16 a, 711–712 [1961]; eingegangen am 5. Mai 1961)

ECKER and WEIZEL¹ proposed that the electrostatic contribution to the internal energy, U_w , of a plasma is given by

$$U_w = - \frac{2 e^2 \bar{\alpha} N_e}{r_0} - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{8}} \frac{e^2 N_e}{D} \quad (1)$$

where D is the DEBYE length, $\bar{\alpha}$ is the average MADELUK coefficient, e is the electronic charge, N_e is the electron density, $r_0 = (V/N_e)^{1/3}$ is the average separation distance between particles of like sign, and V is the volume of the plasma. The change in ionization potential ΔI due to the electrostatic interactions in a singly ionized plasma is given by

$$\Delta I = \mu_1^{el} + \mu_e^{el} - \mu_0^{el} \quad (2)$$

where μ^{el} is the electrostatic contribution to the chemical potential, and the subscripts 0, 1, and e refer to neutral particles, ions, and electrons, respectively. Using well-known thermodynamic formulas to obtain the chemical potentials, ΔI is found to be

$$\Delta I = - \frac{8}{3} \frac{e^2 \bar{\alpha} N_e^{1/3}}{V^{1/3}} - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{8}} \frac{e^2}{D} \quad (3)$$

ECKER and WEIZEL have an additional factor of $\frac{3}{2}$ in the

second term. This appears to be an error which was also noted by THEIMER².

The validity of ECKER and WEIZEL's hypothesis is not obvious, and in fact, it has been subject to some criticism by THEIMER^{2,3} who suggested, among other things, that $\bar{\alpha}$ may be near zero. ECKER and WEIZEL^{4,5} replied to these comments. The second term of Eq. (3), except for the numerical factor, is the DEBYE-HÜCKEL⁶ term, and is well-established theoretically. However, the validity of the first term is somewhat unclear.

The first term can be examined in the light of a theory of electrolytes developed by BERLIN and MONTROLL⁷ for the case of point ions and small fluctuations. BERLIN and MONTROLL found that the thermodynamic functions changed their analytical form at a critical density which can be obtained from

$$\sum_i n_i = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{D^3} \quad (4)$$

where the summation is over all of the charged particles in the plasma and $n_i = N_i/V$. For a gas containing only singly charged ions and electrons, the critical electron density is

$$n_e^{\text{crit}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{kT}{e^2} \right)^3 \quad (5)$$

where k is BOLTZMANN's constant and T is the temperature. At $T = 10,000^\circ\text{K}$, for example, $n_e^{\text{crit}} = 3.44 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. For charged particle concentrations less than the critical value, the DEBYE-HÜCKEL expressions hold. For concentrations greater than the critical value, more complicated expressions apply. The chemical potential

* Present Address: Plasma Propulsion Laboratory, Republic Aviation Corporation, Farmingdale, New York, U.S.A.

¹ G. ECKER and W. WEIZEL, Ann. Phys., Lpz. 17, 126 [1956].

² O. THEIMER, Z. Naturforschg. 12 a, 518 [1957].

³ O. THEIMER, Z. Naturforschg. 13 a, 568 [1958].

⁴ G. ECKER and W. WEIZEL, Z. Naturforschg. 12 a, 859 [1957].

⁵ G. ECKER and W. WEIZEL, Z. Naturforschg. 13 a, 1093 [1958].

⁶ P. DEBYE and E. HÜCKEL, Phys. Z. 24, 185 [1923].

⁷ T. H. BERLIN and E. W. MONTROLL, J. Chem. Phys. 20, 75 [1952].